Teoria miary
SPPI/WPPT IIr. semestr zimowy 2006/7
WYKŁAD 12: TWIERDZENIA LEBESGUE'A I LEMAT FATOU

Poniższe trzy twierdzenia zachodzą w ogólnym przypadku przestrzeni miarowej (X, Σ, μ). f_n, g_n oznaczają zawsze ciągi funkcji *mierzalnych*, $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej. *Załóżmy, że $f_1 \geq 0$ i dla każdego n, $f_{n+1} \geq f_n$ (czyli f_n jest niemalejącym ciągiem funkcji nieujemnych mierzalnych). Niech f oznacza granicę (czy też supremum) ciągu funkcji f_n (ta funkcja może przyjmować wartość nieskończoną). Wtedy*

$$\int f\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu$$

(granica właściwa lub nieskończona), co można też zapisać jako

$$\int \lim_n f_n\, d\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu$$

(powiemy, że całka z granicy równa jest granicy całek).

Dowód. Ponieważ dla każdego n mamy nierówność $f \geq f_n$, to $\int f\, d\mu \geq \int f_n\, d\mu$, stąd

$$(*) \qquad \int f\, d\mu \geq \lim_n \int f_n\, d\mu.$$

Niech dla każdego ustalonego n, $g_{n,k}$ będzie niemalejącym (po k) ciągiem funkcji prostych zbieżnym do f_n (istnieje taki, to wiemy). Z definicji całki (a raczej z Faktu 3 w poprzednim wykładzie) mamy

$$\int f_n\, d\mu = \lim_k \int g_{n,k}\, d\mu.$$

Rozważmy funkcje

$$h_k = \sup_{1 \leq n \leq k} g_{n,k}.$$

Są to funkcje proste (każda z nich jest supremum skończenie wielu funkcji prostych). Po pierwsze, jeśli $k \geq n \geq 1$, to $f_k \geq f_n \geq g_{n,k}$, stąd

$$f_k \geq h_k,$$

zatem

$$\lim_k \int f_k\, d\mu = \sup_k \int f_k\, d\mu \geq \sup_k \int h_k\, d\mu.$$

Ponadto,

$$h_{k+1} = \sup_{1 \leq n \leq k+1} g_{n,k+1} \geq \sup_{1 \leq n \leq k+1} g_{n,k} \geq \sup_{1 \leq n \leq k} g_{n,k} = h_k,$$

czyli ciąg h_k nie maleje. Co więcej, $h_k \geq g_{n,k}$ gdy $k \geq n$, stąd dla każdego n $\lim_k h_k \geq f_n$, a zatem $\lim_k h_k \geq f$. Ponieważ, h_k są proste i tworzą ciąg niemalejący, to znowu z Faktu 3,

$$\sup_k \int h_k \, d\mu = \lim_k \int h_k \, d\mu = \int \lim_k h_k \, d\mu \geq \int f \, d\mu.$$

Ostatecznie

$$(**) \qquad \lim_k \int f_k \, d\mu \geq \int f \, d\mu.$$

(*) i (**) dają tezę. $\square$

Uwaga, Twierdzenie nie zachodzi dla ciągów nierosnących funkcji nieujemnych. Przykład $f_n \equiv \frac{1}{n}$ na $(0, \infty)$.

Lemat Fatou. *Załóżmy, że dla każdego n $f_n \geq 0$. Nie zakładamy monotoniczności. Wtedy*

$$\int \underline{\lim} f_n \, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n \, d\mu.$$

Dowód. Niech $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\}$. Oczywiście $f_n \geq g_n \geq 0$ i ciąg g_n nie maleje. Z jednej z kilku równoważnych definicji granicy dolnej mamy, że g_n zbiega (niemalejąco) do granicy dolnej $\underline{\lim} f_n$. Stąd

$$\underline{\lim} \int f_n \, d\mu \geq \underline{\lim} \int g_n \, d\mu = \lim \int g_n \, d\mu = \int \lim g_n \, d\mu = \int \underline{\lim} f_n \, d\mu$$

(tu skrzystaliśmy z Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej). $\square$

Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. *Niech $f_n \to f$ μ-prawie wszędzie (nie zakładamy ani nieujemności, ani monotoniczności, oczywiście wszystkie funkcje muszą być mierzalne). Zakładamy, że istnieje funkcja nieujemna mierzalna g taka, że*
1) $\forall_n \ \ |f_n| \leq g$,
2) $\int g \, d\mu < \infty$.
Wtedy

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

(obie strony istnieją i są skończone). Innymi słowy (podobnie jak poprzednio) całka z granicy równa jest granicy całek.

Dowód. Po pierwsze f^+ i f^- są zmajoryzowane przez g, więc mają całki skończone. To oznacza, że całka z f istnieje i jest skończona. Niech $h_n = g \pm f_n$ (przeprowadzamy jednocześnie dwa rozumowania - dla plusa i dla minusa). Są to funkcje nieujemne. Z lematu Fatou,

$$\underline{\lim} \int h_n \, d\mu \geq \int \underline{\lim} \, h_n \, d\mu.$$

Z liniowości całki i dlatego, że g nie zależy od n i ma całkę skończoną, po obu stronach wyłączy się $\int g\,d\mu$ i można ją odjąć od obu stron. Zostanie

$$\underline{\lim}(\pm\int f_n\,d\mu) \geq \int \underline{\lim}\,(\pm f_n)\,d\mu = \pm\int f\,d\mu.$$

Czyli mamy następujące dwie nierówności (dla + oczywiste, a dla − zmiana znaku zmieni granicę dolną na górną i odwróci nierówność):

$$\underline{\lim}\int f_n\,d\mu \geq \int f\,d\mu \quad \text{oraz} \quad \overline{\lim}\int f_n\,d\mu \leq \int f\,d\mu.$$

To oznacza, że granica całek z f_n istnieje i jest równa całce z f. $\square$

UWAGA: Oba Twierdzenia Lebesgue'a są istotne: żadne nie wynika (bezpośrednio) z drugiego. Pierwsze twierdzenie obejmuje zbieżność do funkcji o całce nieskończonej, co nie podpada pod twierdzenie drugie.

PRZYKŁAD: Na prostej wybierzmy ciąg $x_n \nearrow 1$. Niech $f_n \equiv 0$ na $[0, x_n]$, a dalej niech f_n rośnie liniowo od punktu $(x_n, 0)$ do punktu $(1, y_n)$, gdzie y_n jest tak dobrane, aby całka z f_n po [0,1] wynosiła 1. Niech $f = \sup_n f_n$. Dlaczego od razu widać, że całka z f (po [0,1]) jest nieskończona?